CC BY 4

College of Basic Education Research Journal

https://berj.uomosul.edu.iq/

The Effect of a Proposed Teaching Strategy Based on the Particle Swarm Optimization (PSO) Algorithm on Developing Adaptive Reasoning among Intermediate School Students in Mathematics

Hussein Obaid Dahawi

University of Mosul, College of Education for Pure Sciences, Department of Mathematics, Mosul, Iraq.

Article Information

Article history:
Received: April 19, 2026
Reviewer: June 5, 2026
Accepted: ***June 15, 2026***
Available online: September, 2026

Keywords:
Proposed Strategy,
Particle Swarm Optimization (PSO),
Adaptive Reasoning.

Correspondence:
Hussein Obaid Dahawi
Email: unmohu@uomosul.edu.iq

Abstract

The current research aims to investigate the effect of a proposed instructional strategy, designed and developed based on the principles of the Particle Swarm Optimization (PSO) algorithm, on developing adaptive reasoning among a sample of first-grade intermediate school students in mathematics. To achieve this objective, the research adopted a quasi-experimental approach with a two-equivalent-groups design (experimental and control). The research sample consisted of 73 students, randomly distributed into two groups: the experimental group included 36 students who studied using the proposed strategy, while the control group included 37 students who studied using the conventional method. The equivalence of the two groups was verified across several variables: chronological age, prior mathematics achievement in the sixth grade of primary school, and pre-test scores in adaptive reasoning. The study required constructing a primary instrument, which was an Adaptive Reasoning Test consisting of 30 items distributed across four key skills (mathematical justification, explanation and exploration, verification and proof, and mathematical generalization), and its validity and reliability were duly established. Following the implementation of the experiment, which lasted for eight weeks, the results revealed a statistically significant superiority of the experimental group over the control group in both the post-test of adaptive reasoning and in its overall development. Based on these findings, the researcher concluded that the proposed strategy is highly effective in enhancing students' abilities to construct mathematical justifications and proofs. Consequently, the study recommends integrating this strategy into teacher guides and training educators on its core principles.

P-ISSN: 1992–7452 **E-ISSN:** 2664-2808

أثر استراتيجية تدريسية مقترحة قائمة على خوارزمية أسراب الطيور (P. S. O) في تنمية الاستدلال لتكيفي لدى طلاب المرحلة المتوسطة في مادة الرياضيات

حسين عبيد ضحوي

جامعة الموصل، كلية التربية للعوم الصرفة، قسم الرياضيات، موصل، العراق.

المستخلص

يهدف البحث الحالي الى معرفة أثر استراتيجية تدريسية، تم اقتراح وبناء استراتيجية تدريسية مستندة إلى مبادئ خوارزمية أسراب الطيور(Particle Swarm Optimization)، في تنمية الاستدلال التكيّفي لدى عينة من طلبة الصف الاول المتوسط في مادة الرياضيات .ولتحقيق هذا الهدف، اعتمد البحث على المنهج شبه التجريبي بتصميم المجموعتين المتكافئتين (التجريبية والضابطة) .تكوّنت عينة البحث من (73) طالباً، جرى توزيعهم عشوائياً باذ ضمّت المجموعة التجريبية (36) طالباً درسوا وفق الاستراتيجية المقترحة، في حين ضمّت المجموعة الضابطة (37) طالباً درسوا بالطريقة الاعتيادية .وتم التحقق من تكافؤ المجموعتين في متغيرات (العمر الزمني، تحصيل مادة الرياضيات لسادس الابتدائي، والاستدلال التكيفي القبلي) .تطلّب البحث بناء أداة رئيسة تمثلت في "اختبار الاستدلال التكيّفي المكوّن من (30) فقرة الموزعة على مهارات (التبرير الرياضي، التفسير والاستكشاف، التحقق والاثبات، التعميم الرياضي)، وقد تم التحقق من صدقه وثباته، وبعد تطبيق التجربة التي استمرت ثمانية أسابيع، أظهرت النتائج تفوقاً للمجوعة التجريبية على المجموعة الضابطة في اختبار استدلال التكيفي البعدي وفي تنميته الاختبار ايضا و واستنتج الباحث أن الاستراتيجية المقترحة تمتلك فاعلية في تعزيز قدرات الطلاب على بناء التبريرات والأدلة الرياضية، وعليه، أوصى البحث بضرورة دمج هذه الاستراتيجية في أدلة المدرسين وتدريبهم على مبادئها.

الكلمات المفتاحية: استراتيجية المقترحة، اسراب الطيور، الاستدلال التكيفي.

1. المقدمة

تتبوأ مادة الرياضيات مكانةً جوهرية ومفصلية في منظومة البناء المعرفي والعقلي للمتعلم؛ فهي لم تعد تُقارب بوصفها مجرد أرقام وعمليات حسابية مجردة، بل هي لغة عالمية دقيقة تصيغ الفكر المنطقي وتُنمّي مهارات حل المشكلات المتقدمة. وتستمد الرياضيات أهميتها البالغة من طبيعتها البنائية التراكمية التي تتطلب مستويات عليا من التفكير والتأمل، اذ تمثل القاعدة الأساسية لفهم العلوم التطبيقية والتكنولوجية المعاصرة، والمحرك الأساسي لاقتصادات المعرفة في القرن الحادي والعشرين (Boaler, 2016: 12-15). وفي هذا السياق، يؤكد المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات في الولايات المتحدة (NCTM, 2014: 23)على ضرورة انتقال غرف التعلم من التركيز على الطلاقة الإجرائية البحتة إلى التركيز على الفهم المفاهيمي العميق الذي يُمكن المتعلم من ربط المعرفة الرياضية بسياقات حياتية متنوعة. وعلى الرغم من هذه الأهمية البالغة، والمحاولات المستمرة لتطوير مناهج الرياضيات، فإن تشخيص الواقع التعليمي، لاسيما في مرحلة التعليم الأساسي، يُبرز فجوة عميقة وتباينًا واضحاً بين الأهداف الطموحة المنشودة في المناهج الحديثة وبين المخرجات الفعلية المتمثلة في الكفايات الرياضية للطلبة (العبيدي، 2021: 22). إذ لا يزال الطابع السائد في العديد من الممارسات التعليمية يتمثل في التعامل مع الرياضيات بوصفها قوالب جاهزة وخوارزميات صمّاء تُحفظ لتُستدعى وقت الاختبار. هذا النمط التقليدي يُفقد المتعلم القدرة على إدراك البنية العميقة للمادة، ويحرمه من المرونة الذهنية المطلوبة لمواجهة المشكلات غير المألوفة(Schoenfeld, 2014: 87) ، اذ أشارت نتائج تقارير (TIMSS, 2023: 45)إلى تدنٍ ملحوظ في قدرات الطلبة على ممارسة الاستدلال الرياضي وبناء الحجج المنطقية، وميلهم للاعتماد المطلق على الاسترجاع الآلي.

وفي ظل هذه التحديات والإشكاليات الميدانية، اتجهت الأنظار التربوية الحديثة نحو مفهوم "الاستدلال التكيفي (Adaptive Reasoning) بوصفه الركيزة الأهم والمكون الحاسم لتحقيق "الإتقان الرياضي .(Mathematical Proficiency)" وقد حدد (Kilpatrick et al., 2001: 116) الاستدلال التكيفي بأنه السعة العقلية للتفكير المنطقي، والتأمل، والتفسير، وتبرير الخطوات الرياضية. إنه مفهوم يتجاوز بكثير عملية استخراج الناتج الصحيح، ليعكس قدرة الطالب المتبصرة على الإجابة عن تساؤل "لماذا هذا الحل صحيح؟"، وتقديم التبريرات المنطقية للخطوات، فضلاً عن بناء الأدلة الرياضية الرصينة والمحاكمة العقلية للبدائل المتاحة .(Stylianides & Stylianides, 2021: 94) ويؤكد التربويون (الزهراني، 2023: 62) أن غياب أو تهميش هذا البُعد الاستدلالي في غرف الصف التقليدية، التي تُقيّد

الطالب في دور المتلقي السلبي، هو السبب المباشر لظاهرة "الرياضيات التقليدية" التي يعاني منها معظم الطلبة اليوم.

ولمواجهة هذا القصور المعرفي والمنهجي، قدمت الثورة المعاصرة في مجالات الذكاء الاصطناعي وعلوم الحاسب إلهاماً حقيقياً للتربويين، تحديداً من خلال دراسة "الخوارزميات المستوحاة من الطبيعة " (Nature-Inspired Algorithms)التي أثبتت كفاءة استثنائية في حل أعقد المشكلات (Yang, 2010: 45). ومن أبرز وأنجح هذه الخوارزميات "خوارزمية أسراب الطيور (Particle Swarm Optimization – PSO)" التي ابتكرها الباحثان(Kennedy & Eberhart, 1995: 1943) ، والتي استُلهمت ميكانيكيتها من محاكاة السلوك التشاركي والتعاوني المذهل لأسراب الطيور والأسماك أثناء بحثها المنظم عن الغذاء في بيئات مجهولة.

ترتكز فلسفة هذه الخوارزمية على مبادئ واضحة وديناميكية: التحرك بوعي مستمر نحو الهدف، استثمار الكائن (الجسيم) لأفضل تجربة شخصية سابقة حققها بنفسه، والتأثر الإيجابي والتكيف مع أفضل الحلول التي يصل إليها المجموع لضمان عدم الوقوع في الحلول القاصرة .(Poli et al., 2007: 38) ومن المنظور التربوي، تتناغم هذه المبادئ الخوارزمية بشكل مُدهش وعميق مع أرقى نظريات التعلم الفعّال، لاسيما النظرية البنائية الاجتماعية للعالم (Vygotsky, 1978: 86) التي ترى أن التطور المعرفي يحدث نتيجة التفاعل النشط بين التأمل الذاتي للفرد وبين السياق الاجتماعي المحيط به (الشمري، 2023: 15).

إن محاكاة نظام "السرب" في البيئة الصفية تنقل الطالب من حالة "الانعزال المعرفي" إلى حالة "التشارك الاستدلالي"، حيث تتضافر الجهود الفردية وتتلاقح الأفكار لإنتاج تبريرات رياضية أكثر نضجاً وموثوقية .(Al-Shami & Hassan, 2022: 122)ومن هذا المنطلق الدقيق، تنبثق الفكرة الجوهرية والمبتكرة لهذا البحث؛ والمتمثلة في تحويل هذه المبادئ الرياضية-الحاسوبية (خوارزمية أسراب الطيور) إلى معمارية هندسية وخطوات تدريسية منظمة وممنهجة. حيث يُقدم البحث استراتيجية تدريسية مقترحة تستهدف بشكل مباشر استثارة وتنمية الاستدلال التكيفي لدى طلبة المرحلة المتوسطة، في محاولة بحثية جادة لمد جسر معرفي تطبيقي يربط بين الفاعلية الفائقة للابتكارات التكنولوجية والخوارزمية، وبين الممارسات التربوية الحية في البيئة العربية، سعياً للارتقاء بالعقلية الرياضية للمتعلم نحو مستويات أرحب من التفكير والتبرير.

1.1. مشكلة البحث

تنبثق مشكلة البحث من ملاحظة واقع تعليم الرياضيات في المرحلة المتوسطة، اذ تشكلت ملامحها من خلال التواصل المباشر مع مدرسي المادة للصف الأول المتوسط عن طريق الدورات التي يقيمها القسم لمدرسي مادة الرياضيات الذين أشاروا من خلال خبرتهم الميدانية في التدريس إلى وجود تحديات حقيقية تواجه الطلبة في امتلاك مهارات الاستدلال التكيفي؛ إذ يلاحظ ميل الطلبة غالباً نحو الحلول النمطية واستخدام القوانين بصورة إجرائية دون التركيز الكافي على تقديم المسوغات المنطقية التي تدعم تلك الحلول، وهو ما يتوافق مع ما طرحته جملة من الدراسات كدراسة الشمري والظلعان (2025) ،ودراسة الحربي (2021) التي رصدت حاجة الطلبة لتعزيز قدراتهم الاستدلالية، وما أكده تقرير (timss.2023)بشأن ضرورة الارتقاء بمستويات التفكير الاستدلالي ، اذ يسعى البحث الحالي نحو مسار تطويري يستجيب لهذه الحاجة عبر استثمار المفاهيم الحديثة في "خوارزمية أسراب الطيور" القائمة على مبادئ التفاعل والبحث المشترك، ومحاولة صياغتها في استراتيجية تدريسية مقترحة تهدف إلى إضفاء نوع من المرونة والفاعلية على أداء الطلبة وتنمية قدرتهم على الاستدلال السليم، ومن هنا برزت الحاجة للإجابة عن التساؤل الاتي:

ما أثر استراتيجية تدريسية مقترحة قائمة على مبادئ خوارزمية أسراب الطيور في تنمية الاستدلال التكيّفي لدى طلبة الصف الاول المتوسط في مادة الرياضيات

2.1 أهمية البحث

تتفرع أهمية البحث الحالي إلى مسارين متكاملين:

أ. الأهمية النظرية:

1-تُثري هذه الدراسة المكتبة التربوية العربية بتأصيل نظري مبتكر يربط بين حقل تعليم الرياضيات وعلم الخوارزميات الحيوية المستوحاة من الطبيعة.

2-تُقدم الدراسة انموذجا تنظيرياً يُبرهن على أن الخوارزميات ليست مجرد أدوات تقنية للذكاء الاصطناعي، بل يمكن أن تُمثل فلسفة تربوية عميقة.

3-يُسلط البحث الضوء على "الاستدلال التكيّفي" باعتباره أحد اهداف الاتقان الرياضي

4- تدعم الاستراتيجية المقترحة نظرية Vygotsky في التعلم الاجتماعي البنائي، من خلال الانتقال المنظم من البناء الفردي للمعرفة إلى التشارك الجماعي.

ب. الأهمية التطبيقية:

1-تقديم خطط تدريسية تمكن المدرسين من تنفيذ الاستراتيجية بمرونة وفاعلية دون اشتراط خبرات برمجية سابقة.

2-تُقدم للباحثين والمدرسين أداة قياس مقننة لاختبار التفكير الاستدلالي التكيفي

3.1 هدفا البحث

يهدف البحث الحالي إلى إنجاز ما يأتي:

1-بناء استراتيجية تدريسية مقترحة مُستلهمة من مبادئ خوارزمية اسراب الطيور.

2-التعرف على إثر الاستراتيجية المُقترحة في تنمية الاستدلال التكيّفي لدى طلاب الصف الأول المتوسط في مادة الرياضيات

4.1 فرضيات البحث

للتحقق من هدف البحث الثاني، تم صياغة الفرضيتين الصفريتين:

-الفرضية الصفرية :لا يوجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مستوى ($\alpha \leq 0.05$) بين متوسطَي درجات طلاب المجموعة التجريبية (التي درست بالاستراتيجية المقترحة) وطلاب المجموعة الضابطة (التي درست بالطريقة الاعتيادية) في اختبار الاستدلال التكيّفي البعدي.

-الفرضية الصفرية :لا يوجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مستوى ($\alpha \leq 0.05$) بين متوسطَي تنمية درجات طلاب المجموعة التجريبية (التي درست بالاستراتيجية المقترحة) وطلاب المجموعة الضابطة (التي درست بالطريقة الاعتيادية) في اختبار الاستدلال التكيّفي.

5.1 حدود البحث

يقتصر تعميم نتائج هذا البحث على الحدود الآتية:

1-الحدود الزمانية :تم تطبيق التجربة الميدانية خلال الفصل الدراسي الاول العام الدراسي 2023-2024.

2-الحدود المكانية :المدارس المتوسطة الحكومية التابعة لمدينة الموصل

3-الحدود البشرية :طلاب الصف الاول المتوسط.

الحدود الموضوعية :الفصول الثلاثة الأولى من كتاب صف الاول المتوسط. (الاعداد الصحيحة، الاعداد النسبية، متعدد حدود)

6.1 تحديد المصطلحات

1- خوارزمية أسراب الطيور :(Particle Swarm Optimization - PSO)

نظرياً عرفها Eberhart (1995) بانها خوارزمية حاسوبية للتحسين تم استنباطها من محاكاة حركة الطيور الجماعية للبحث عن طعامها، اذ تتحرك الجسيمات في فضاء الحل مستندة إلى أفضل موقع بلغته ذاتياً وأفضل موقع بلغه السرب كاملاً للوصول للحل الأمثل.

اجرائيا: مجموعة من الخطوات التي يقوم بها مدرس مادة الرياضيات لتدريس الفصول الثلاثة الأولى لمادة لرياضيات للصف الأول المتوسط والتي تبدأ بالتهيئة، الاستكشاف الفردي للطالب، المشاركة الجماعية للطلاب، ليصلو التقارب في افكارهم نحو الحل، التأمل في نتائج حلهم لتنتهي بمرحلة التقييم.

2-الاستدلال التكيّفي:(Adaptive Reasoning)

نظرياً :عرفها Kilpatrick وآخرين (2001)، هي عملية ذهنية يمارسها الطالب تبدأ للتفكير المنطقي، والتأمل، والتفسير، وتبرير الخطوات في الرياضيات، متضمناً بناء الحجج المنطقية واختبار صحتها.

اجرائيا: هو القدرة الكامنة لطالب الصف الأول المتوسط على التحليل المنطقي للمفاهيم الرياضية المتضمنة في الاختبار المعّد لهذا الغرض، من خلال التأمل واستخلاص النتائج وتفسيرها بناءً على الحجج والأدلة المنطقية؛ ويُعبّر عنها إجرائياً بالدرجة الكلية التي يحصل عليها الطالب في اختبار الاستدلال التكيفي المُعّد.

2. الإطار النظري

1.2 خوارزمية اسراب الطيور

1- نشأة الخوارزمية

نشأت فكرة خوارزمية أسراب الطيور في رحاب مختبرات علوم الحاسوب عام 1995، حين عكف الباحثان الأمريكيان James Kennedy عالم علم النفس الاجتماعي، و Russell Eberhartالمهندس الكهربائي، على محاكاة السلوك الاجتماعي للكائنات الحيوانية في بيئتها الطبيعية. وقد انطلقا من ملاحظة ظاهرة بيولوجية بالغة الأهمية تتمثل في تحرك أسراب الطيور والأسماك بتناغم مذهل رغم انعدام قائد مركزي يُوجِّه حركتها؛ وبناءً على هذه الظاهرة، تمت صياغة آلية عمل الخوارزمية بان يتخذ كل فرد قراراته الحركية بناءً على موقعه وسرعته الحالية، مستفيداً من أفضل موقع وصل إليه شخصياً، وأفضل موقع بلغه السرب كله. (Kennedy & Eberhart, 1995) ومن رحم هذه الظاهرة البسيطة المذهلة وُلدت خوارزمية فاقت في تأثيرها حدود مجال علوم الحاسوب، ويكمن سر نجاحها في توازنها الدقيق بين استثمار المعرفة المتراكمة واستكشاف مناطق جديدة مجهولة، وهو توازن يُشبه تماماً ما يحدث في عقل الإنسان أثناء حل المشكلات. (Poli, Kennedy & Blackwell, 2007) وبفضل هذا النجاح، انتشرت الخوارزمية بسرعة لافتة لتشمل مجالات الهندسة الكهربائية، والاقتصاد، والطب، وأبحاث المناخ، وعلم الأحياء الجزيئي، لتُمثِّل اليوم واحدةً من أكثر خوارزميات التحسين الوصفية استشهاداً من الأدبيات العلمية. وتم تحويل الخوارزمية إلى استراتيجية تدريسية يكمن الإبداع التربوي هنا في إسقاط هذه الميكانيكية الحاسوبية على بيئة التعلم .فالطالب كـ "الجسيم"، ينطلق من معرفته السابقة، ويقوم بمحاولات فردية للحل ليصل إلى (أفضل مستوى شخصي) التأمل الذاتي، ثم يتفاعل مع أقرانه ليستفيد من الحل الأفضل داخل الصف الدراسي، ليتمكن في النهاية من تعديل مساره المعرفي نحو الفهم العميق.

2-خطوات الاستراتيجية المقترحة: لتصميم خطوات (مراحل)الاستراتيجية المقترحة وبعد اطلاع الباحث على الادبيات المتعلقة بخوارزمية اسراب الطيور وتحليل فكرتها والية العمل بها في تخصص الحاسوب وتكيفيها لتخصصات أخرى فضلا عن اطلاعه على عدد من النظريات المعرفية والتربوية تبنى نظريات التعلم التعاوني والبنائية الاجتماعية ليسند عليها خوارزميته المتبناة، وعليه وضع الباحث خطوات التدريس على وفق الخطوات ل تُنفذ وفق خمس مراحل وهي:

-التهيئة والتموضع :عرض موقف رياضي يستدعي الطالب خبرته السابقة من قبل المدرس.

-الاستكشاف الفردي: محاولة الطالب بمفرده للحل وإيجاد تبريراته ومقارنتها بأفضل ما قدمه سابقاً.

-التشارك الجماعي: نقاش الحل الفردي للطلبة ضمن مجموعات صغيرة تتراوح (3-4) طلاب لفرز أفضل الحلول.

-التقارب والتوحيد :قيادة النقاش من قبل المدرس نحو الحل الانموذجي ليتم ترسيخ المفهوم لدى الطلاب.

-التأمل والتقييم :مراجعة الطالب لأخطائه وتدوين ملاحظاته.

3-دور المدرس والطالب :في هذه الاستراتيجية، ينتقل **المدرس** من دور المُلقّن إلى دور "مُيسّر السرب"، اذ يصمم الموقف التعليمي ويوجه النقاشات الجماعية في مرحلة التقارب لتجنب تشتت الطلاب، ويطرح أسئلة سابرة لاستخراج التبريرات. أما **الطالب**، فهو الباحث النشط؛ يتحمل مسؤولية استكشاف الحل، وتقييم ذاته(، والمشاركة بفاعلية وتقبل النقد العلمي لبناء الفهم.

2.2: الاستلال التكيفي

يُعد "الاستدلال التكيّفي" واحداً من أبرز المفاهيم التي أعادت تشكيل مشهد التربية المعاصرة. وقد برز هذا المفهوم بقوة وتأصل أكاديمياً من خلال التقرير التاريخي الصادر عن المجلس القومي للبحوث في الولايات المتحدة (National Research Council) تحت عنوان "إضافة ذلك: مساعدة الأطفال على تعلم الرياضيات(Adding It Up) "، اذ حُدد الاستدلال التكيّفي بوصفه أحد الخيوط الخمسة المتشابكة التي تُشكل معاً "الكفاءة الرياضية إنه يمثل الترابط بين الفهم المفاهيمي والطلاقة الإجرائية؛ فمن خلاله لا يكتفي المتعلم بمعرفة "كيفية" حل المسالة أو الوصول إلى الناتج، بل يُدرك ويفسر "لماذا" هذه خطوات الحل، و"متى" يكون استخدامها مبرراً ومنطقياً .(NCTM, 2014) وفي البيئة العربية، أشار العبيدي (2021) إلى أن الاستدلال التكيّفي هو أرقى درجات التفكير الرياضي، اذ ينقل الطالب من مرحلة التلقي السلبي والاسترجاع الآلي للمعلومات، إلى مرحلة المحاكمة العقلية النشطة التي تُمكّنه من تكييف معرفته السابقة وتطويعها لمواجهة مواقف رياضية غير مألوفة.

- **الأهمية التربوية للاستدلال التكيّفي في تعلم الرياضيات** تتجلى أهمية الاستدلال التكيّفي في كونه المحرك الأساسي الذي يمنح الرياضيات معناها الحقيقي كلغة للتفكير المنطقي. يرى شونفيلد (Schoenfeld, 2014) أن المتعلم الذي يفتقر إلى الاستدلال التكيّفي يتعامل مع الرياضيات كمجموعة من القواعد السحرية العشوائية التي يجب حفظها، مما يجعله عرضة للنسيان السريع والعجز أمام أي تغيير طفيف في بنية المسألة. في المقابل، فإن الطالب الذي يمتلك هذه المهارة يبني الثقة في قدراته العقلية، اذ يُدرك أن الرياضيات ليست نصوصاً مُقدسة، بل هي نسق منطقي يمكن التحقق منه وإثباته. كما وتوكد كل من ستيليانيدس وستيليانيدس (Stylianides & Stylianides, 2021) أن تنمية الاستدلال التكيّفي في المرحلة المتوسطة تُعد أمراً بالغ الحساسية؛ لأن هذه المرحلة تمثل جسر العبور من

الحساب المادي الملموس إلى الجبر والتفكير المجرد، مما يتطلب تزويد الطلاب بأدوات عقلية تمكنهم من الموازنة بين المعطيات وبناء الحجج الرياضية السليمة.

– **أبعاد ومهارات الاستدلال التكيّفي** لا يُعد الاستدلال التكيّفي كتلة صماء، بل هو مركب عقلي يتألف من أبعاد ومهارات فرعية متداخلة، وتتحدد بشكل رئيسي في الأبعاد الآتية:

- **التبرير الرياضي :(Mathematical Justification)** وهو جوهر الاستدلال، ويُقصد به قدرة الطالب على تقديم أدلة عقلانية ومنطقية تدعم صحة خطواته وإجراءاته. فالطالب هنا لا يقدم إجابة نهائية فحسب، بل يصوغ خطاباً رياضياً (سواء كان شفوياً في مرحلة التشارك الجماعي، أو تحريرياً) يُقنع به أقرانه ومعلمه بسلامة مساره الفكري (الزهراني، 2023).
- **التفسير والاستكشاف :(Explanation and Exploration)** ويتعلق بقدرة المتعلم على سبر أغوار المسألة، وتفكيك معطياتها، واستكشاف العلاقات الخفية بين المتغيرات. ويتضمن هذا البعد صياغة تفسيرات واضحة للمفاهيم الرياضية وإعادة بنائها بلغة الطالب الخاصة، مما يعكس فهماً عميقاً يتجاوز الحفظ السطحي.(Sfard, 2008)
- **التحقق والإثبات :(Verification and Validation)** ويُشير إلى القدرة على فحص وتقويم الحلول الناتجة، والمحاكمة النقدية للبدائل المتاحة. الطالب الذي يمتلك هذه المهارة لا يركن إلى حله من المحاولة الأولى، بل يعمد إلى اختبار صحته بطرائق بديلة، كاستخدام التقدير التقريبي، أو الرسم الهندسي، أو التعويض العكسي للتأكد من خلوه من التناقض المنطقي (Kilpatrick et al., 2001).

– **دور البيئة الصفية في تنمية الاستدلال التكيّفي** لا ينمو الاستدلال التكيّفي في بيئات التعلم التقليدية التي تحتكر فيها السلطة المعرفية بيد المعلم، بل يحتاج إلى بيئة "آمنة معرفياً" تشجع على المخاطرة الفكرية. وهنا تتلاقى فلسفة الاستدلال التكيّفي بامتياز مع "خوارزمية أسراب الطيور"؛ إذ تتطلب تنمية هذا الاستدلال مهاماً رياضية مفتوحة، ومساحة للتأمل الفردي. وحواراً اجتماعياً نشطاً وتبادلاً للأدلة بين الأقران. إن وضع الطالب في قلب هذا الصراع المعرفي الموجه هو ما يُجبره على توليد التبريرات، واختبار فرضياته، وإعادة تكييف تفكيره بناءً على التغذية الراجعة من زملائه ومُعلمه، وهو ما تهدف الاستراتيجية المقترحة إلى تفعيله داخل الغرفة الصفية.

3.2: الدراسات السابقة: بعد ان حلل الباحث الدراسات السابقة التي تناولت خوارزمية اسراب الطيور والاستدال التكيفي وجد ان الدراسات في المحور الأول معظمها تخصصت في مجالات علمية منوعة وان منهجيتها بعيدة عن المنهجية التربوية باستثناء دراسة واحدة وهي /

– دراسة **(Li & Li, 2023)** هدفت إلى تصميم نموذج للتعليم الإلكتروني قائم على خوارزمية الطيور المهاجرة (Migratory Bird Algorithm) بما يحقق أبعاد التنمية المستدامة (البيئية، الاقتصادية، والاجتماعية)، وذلك من خلال تحسين كفاءة توزيع الموارد التعليمية وتقليل الاستهلاك الرقمي للطاقة. ولتحقيق هذا الهدف، طُبقت الدراسة على عينة مكونة من (150) طالباً وطالبة في مرحلة التعليم الجامعي، تم توزيعهم إلى ثلاث مجموعات، واعتمد الباحثان على ثلاثة أدوات: مقياس كفاءة الموارد الرقمية، ومقياس الوعي بالتنمية المستدامة، واختبار أداء معرفي. وأسفرت النتائج عن قدرة خوارزمية الطيور المهاجرة على تقليل وقت تحميل المحتوى بنسبة 27%، وإعادة توجيه الطلبة إلى المسارات الأقل استهلاكاً للطاقة الرقمية دون التأثير في جودة التعلم، كما أظهرت المجموعة التجريبية تحسناً ملحوظاً في مؤشرات الاستدامة الاجتماعية (العدالة في الوصول للمحتوى) والاقتصادية (تقليل تكاليف الصيانة الرقمية)، مقارنة بالنماذج التقليدية للتعليم الإلكتروني.

اما فيما يتعلق بالمتغير الثاني لاستلال التكيفي فان معظم الدراسات ذهبت الى العمل على دراسة الاستدلال بصورة عامة باستثناء الدراسة التالية:

–**دراسة (الشمري والضلعان، 2025)** هدفت إلى التعرف على فاعلية تدريس الرياضيات باستخدام الخرائط الذهنية الإلكترونية في تنمية الاستدلال التكيفي (بأبعاده: التفكير المنطقي، التبرير الاستدلالي، توظيف العلاقات بين المفاهيم أو المواقف) لدى طلاب الصف الثالث المتوسط. ولتحقيق هذا الهدف، طُبقت الدراسة على عينة قصدية مكونة من (66) طالباً من طلاب الصف الثالث المتوسط، تم تقسيمهم إلى مجموعتين متساويتين: تجريبية) درست وحدة المعادلات الجذرية والمثلثات باستخدام الخرائط الذهنية الإلكترونية عبر برنامج (Mind Meister) وضابطة (درست الوحدة نفسها بالطريقة الاعتيادية)، واعتمد الباحثان على اختبار تحصيلي للاستدلال التكيفي مكون من (45) فقرة من نوع الاختيار من متعدد، تم التحقق من صدقه وثباته من خلال تطبيقه على عينة استطلاعية. وأسفرت النتائج عن وجود فروق دالة إحصائياً بين متوسطات درجات طلاب المجموعة التجريبية والضابطة في القياس البعدي لاختبار الاستدلال التكيفي وأبعاده الثلاثة لصالح المجموعة التجريبية، كما أظهرت النتائج وجود فروق دالة إحصائياً بين متوسطات درجات المجموعة التجريبية في القياسين القبلي والبعدي لصالح التطبيق البعدي،

وبلغت نسبة الكسب المعدل لبلاك (0.876) للتفكير المنطقي، (0.812) للتبرير الاستدلالي، مما يشير إلى فاعلية كبيرة وكسب إحصائي في تنمية الاستدلال التكيفي باستخدام الخرائط الذهنية الإلكترونية.

ويجد الباحث هنا ان مراجعة هذه الأدبيات أسهمت في إثراء البحث الحالي وتوجيهه منهجياً ومعرفياً من خلال محاور عدة؛ حيث ساعدت في بلورة المفهوم النظري للأبعاد الفرعية المكونة للاستدلال التكيّفي (التبرير، التفسير، والتحقق)، ووفرت مرجعية علمية في بناء أداة القياس (اختبار الاستدلال التكيّفي) وكيفية ضبط الخصائص السيكومترية له من صدق وثبات. كما وجّهت الدراسات السابقة المعروضة الباحث نحو اختيار التصميم شبه التجريبي الأنسب للمجموعتين المتكافئتين، ووفرت دليلاً إحصائياً وتربوياً قاطعاً على فاعلية خوارزميات الذكاء الاصطناعي من جهة، وأهمية البيئات التفاعلية الحوارية في تعليم الرياضيات من جهة أخرى، مما ساعد في صياغة الفرضيات الصفرية وتفسير النتائج النهائية للبحث.

فبينما تنفرد الدراسة الحالية بنقل هذه الآلية الحاسوبية المعقدة وتحويل مبادئها الفلسفية (الوعي الذاتي pBest، والحكمة الجماعية gBest) إلى **استراتيجية تدريسية واقعية (Face-to-Face)** تُطبق داخل الغرفة الصفية .

3.اجراءات البحث

1.3 المنهج والتصميم التجريبي

لضمان الدقة والموضوعية، اتبع الباحث المنهج شبه التجريبي ذي التصميم القائم على المجموعتين المتكافئتين (تجريبية وضابطة) ذواتي الاختبار القبلي والبعدي؛ كونه المنهج الأكثر مواءمة للبحوث التربوية التي يصعب فيها العزل التام للمتغيرات الدخيلة.

2.3- مجتمع البحث وعينته

شمل المجتمع الكلي جميع طلاب الصف الاول المتوسط في المدارس الحكومية في مركز مدينة الموصل، وتم اختيار العينة قصدياً باختيار متوسطة أبناء الاثير وذلك لتطبيق تجربة البحث، وثم تم السحب العشوائي لشعبتين، فوقع الاختيار على شعبة (ا) لتمثل المجموعة التجريبية بـ (36) طالباً، وشعبة (ب) لتمثل المجموعة الضابطة بـ (37) طالباً، فأصبحت العينة الكلية مكونة (73) طالبا، علما انه تم استيعاد الطلاب الراسبين من عينة البحث.

3.3-التكافؤ بين المجموعتين

قبل البدء في التجربة، أجرى الباحث ضبط المتغيرات الدخيلة وتأكيد تكافؤ المجموعتين في: (العمر الزمني بالأشهر، التحصيل الدراسي السابق في الرياضيات، درجة اختبار الذكاء، ودرجات الاستدلال التكيّفي القبلي) .أثبتت النتائج عدم وجود فروق دالة احصائيا. كما في الجدول رقم (1)

جدول (1) يوضح نتائج الاختبار التائي (Sig) لمتوسطي مجموعتي البحث في متغيرات التكافؤ

متغير التكافؤ	المجموعة				قيمة ت المحسوبة	القيمة المعنوية (Sig)
	التجريبية		الضابطة			
	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري		
العمر بالأشهر	148.72	10.33	147.36	11.49	0.619	0.889
درجة اختبار الذكاء	25.75	4.27	26.16	4.13	0.29	0.772
درجة الرياضيات	74.35	12.04	74.31	11.97	0.014	0.989
اختبار الاستدلال التكيفي	16.5	2.9	16	3.1	0.72	0.474

4.3-مستلزمات وأدوات البحث

-**تحديد المادة العلمية: تم** تحديد المادة العلمية المتمثلة بالفصول الثلاثة الأولى من كتاب الصف الأول المتوسط (الأعداد الصحيحة- الأعداد النسبية-متعددة الحدود).

-الأغراض السلوكية: بعد ان تم تحديد المادة العلمية تم صياغة-(103) غرضا سلوكيا حسب مستويات بلوم (التذكر، الفهم، التطبيق).

-الخطط التدريسية: في ضوء تحليل المادة الدراسية وصياغة الأغراض السلوكية واطلاع الباحث على عدد من الدراسات السابقة صاغ الباحث خطط للمجموعة التجريبية في ضوء خطوات خوارزمية اسراب

الطيور وخطط للمجموعة الضابطة بالطريقة الاعتيادية اذ بلغ مجموع الخطط لكل مجموعة من (20) خطة.

خطوات تدريس المجموعة التجريبية

-التهيئة والتموضع :يعرض المدرس موقف رياضي يستدعي الطالب خبرته السابقة.

-الاستكشاف الفردي: محاولة الطالب المنفردة للحل وإيجاد تبريراته ومقارنتها بأفضل ما قدمه سابقاً.

-التشارك الجماعي :نقاش مجموعات صغيرة (3-4 طلاب) لفرز أفضل الحلول.

-التقارب والتوحيد :قيادة النقاش من قبل المدرس نحو الحل النموذجي ليتم ترسيخ المفهوم

-التأمل والتقييم :مراجعة الطالب لأخطائه وتدوين ملاحظاته. (اعتقد لا داعي لها هنا او تكيف مع ما سبق.. وبكيفك)

-بناء اختبار الاستدلال التكيّفي:

لغرض إعداد أداة القياس الرئيسة للبحث، اتبع الباحث سلسلة من الخطوات المنهجية المتسلسلة؛ انطلقت بدايةً من الاطلاع على الأدبيات التربوية والدراسات السابقة كدراسة الشمري والظلعان (2025) ودراسة الحربي (2021) المتعلقة بالاستلال التكيفي لتأصيل المفهوم وتحديد مؤشراته بدقة. تم صياغة فقرات الاختبار بالصيغة الأولية ذ مكونة (30) فقرة اختبارية موزعة بالمهارات بالتساوي، بواقع (10) فقرات لكل مهارة من المهارات المحددة بصيغة الاختيار من متعدد. ولضمان الرصانة العلمية والموضوعية للأداة قبل الشروع في تطبيقها النهائي، تم التحقق من صدقها الظاهري من خلال عرضها على لجنة تحكيم متخصصة تألفت من (15) خبيراً ومحكماً، اذ حققت الفقرات نسبة اتفاق علمي بلغت (87%). واستكمالاً للتحقق من الخصائص السيكومترية للاختبار، جرى تطبيقه استطلاعياً على عينة استطلاعية من متوسطة الرشيدية للبنين تألفت من (30) طالباً بتاريخ 2023/10/10 لغرض التأكد من وضوح التعليمات وتم حساب معامل التميز لفقرات الاختبار وكانت قيميه محصورة (0.311-0.756) وهو من ضمن النسبة المقبولة، وتم حساب ثبات الأداة، وقد أظهرت المعالجات الإحصائية تمتع الاختبار بمستوى ثبات عالٍ؛ إذ بلغ معامل الثبات باستخدام معادلة ألفا-كرونباخ (0.84).

5.3-تطبيق تجربة البحث

أ- نُفذت التجربة فعلياً على مدار (8) أسابيع متصلة، بدأ بالتدريس الفعلي للتجربة بتاريخ يوم الخميس (2023/10/19) ودرس المدرس طلاب مجموعتي البحث بموجب الخطط التدريسية المعدّة لكل مجموعة واستمر لغاية يوم الخميس 2024/1/4. درست المجموعة التجريبية

باستخدام الاستراتيجية المقترحة، بينما درست المجموعة الضابطة نفس المحتوى بالطريقة التقليدية.

4- النتائج ومناقشتها

1.4-النتائج المتعلقة بالفرضية الصفرية الأولى

" لا توجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مستوى ($\alpha \leq 0.05$) بين متوسطَي درجات طلاب المجموعة التجريبية (التي درست بالاستراتيجية المقترحة) وطلاب المجموعة الضابطة (التي درست بالطريقة الاعتيادية) في اختبار الاستدلال التكيّفي البعدي". وادرجت النتائج في جدول رقم (2)

جدول رقم (2)

يبين نتائج الاختبار التائي لعينتين مستقلتين في الاختبار البعدي لاستدلال التكيفي

المجموعة	العدد	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	ت المحسوبة	Sig
التجريبية	36	20.3	3.1	2.89	0.017
الضابطة	37	18.1	3.4		

يتضح من الجدول (2) أعلاه بوضوح أن قيمة الدلالة الإحصائية (Sig) قد بلغت (0.017) وهي اقل من مستوى الدلالة الإحصائية (0.05)، مما يبين بوجود فروق ذات دلالة إحصائية بين طلاب المجموعتين لصالح طلاب المجموعة التجريبية. ويعزو الباحث ذلك الى ان الاستراتيجية المقترحة المستلهمة من خوارزمية أسراب الطيور. فقد نجحت بنقل المتعلمين من نمط التلقي السلبي والتطبيق الروتيني للقوانين الذي قُيدت به المجموعة الضابطة، لتضعهم في قلب عملية بناء المعرفة. ففي مرحلة "الاستكشاف الفردي"، وجد الطالب نفسه مدفوعاً لمراجعة بنيته المعرفية واستثمار أفضل حلوله الشخصية، ليمهد بذلك الطريق لمرحلة "التشارك الجماعي" التي حولت الغرفة الصفية إلى بيئة حيوية تضج بالنقاشات الهادفة. ونتيجة لذلك، لم يعد التركيز منصباً على مجرد استخراج الناتج النهائي للمسألة فحسب، بل أصبح لزاماً على الطالب أن يفسر مسار تفكيره، ويطرح مبرراته المنطقية لإقناع زملائه بصحة خطواته، وهو ما يجسد الجوهر الحقيقي للاستدلال التكيّفي. وإلى جانب ذلك، أسهمت محاكاة نظام "السرب" الى توليد دافعية ذاتية وتنافسية إيجابية بين الطلاب ضمن مناخ نفسي آمن يشجع على المحاولة وتجاوز الخوف من الخطأ.

2.4-النتائج المتعلقة بالفرضية الصفرية الثانية

"لا يوجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مستوى ($\alpha \leq 0.05$) بين متوسطَي درجات تنمية طلاب المجموعة التجريبية (التي درست بالاستراتيجية المقترحة) وطلاب المجموعة الضابطة (التي درست بالطريقة الاعتيادية) في اختبار الاستدلال التكيّفي". وادرجت النتائج في جدول رقم (3)

جدول رقم (3)

يبين نتائج الاختبار التائي لعينتين مستقلتين في تنمية الاختبار لاستدلال التكيفي

المجموعة	العدد	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	ت المحسوبة	Sig
التجريبية	36	3.8	0.2	28.41	0.000
الضابطة	37	2.1	0.3		

يتضح من الجدول (3) ان مستوى دلالة ((Sig = 0.000 وهي اقل من (Sig = 0.05)، وبذلك ترفض الفرضية الصفرية، وتقبل الفرضية البديلة، ويعزي الباحث ذلك الى فاعلية الاستراتيجية المقترحة القائمة على خوارزمية أسراب الطيور، والتي صُممت لتوفير بيئة تعلم بنائية وتصاعدية لا تكتفي بتقديم المعلومة، بل تدفع الطالب لتحديث خبراته بشكل مستمر. فقد أتاحت هذه الاستراتيجية للمتعلمين فرصة المراجعة الدائمة لمساراتهم العقلية بناءً على أفضل أداء شخصي توصلوا إليه، ودمج ذلك بفاعلية مع أفضل الحلول المطروحة من قبل أقرانهم في مرحلة التشارك الجماعي، مما أسهم في ردم الفجوات المعرفية لديهم بشكل تدريجي ومدروس طوال فترة التجربة، وضعت الاستراتيجية المقترحة الطلاب في سياقات تفاعلية متكررة تطلبت منهم ممارسة التبرير، وبناء الأدلة، وفحص البدائل بشكل يومي. هذا الانتقال المنظم من التأمل الفردي إلى التشاور والاقناع الجماعي، مصحوباً بالدافعية العالية والشعور بالمسؤولية المشتركة داخل السرب، وهذا مما أدى الى تنمية الاستلال التكيفي لدى المجموعة التجريبية مقارنة مع المجموعة الضابطة وهذه النتيجة متوافقة مع دراسة الشمري والظلعان (2025).

5- الاستنتاجات، التوصيات، والمقترحات

في ضوء نتائج البحث توصَّل الباحث إلى ما يأتي:

1.5-الاستنتاجات:

1- خطوات الاستراتيجية التدريسية ساهمت في تفاعل الطلاب داخل الصف الدراسي من خلال الحوار والنقاش الجماعي

2- التدريس باستخدام استراتيجية المقترحة ساهم في تنمية الاستدلال التكيفي لدى الطلاب المجموعة التجريبية

2.5-التوصيات

1-دعوة لوزارة التربية وواضعي المناهج لتبني هذه الاستراتيجية رسمياً وتضمين خطواتها ضمن أدلة معلمي الرياضيات.

2-إدراج ثقافة "الخوارزميات الحيوية وتطبيقاتها التربوية" ضمن حقائب التدريب المهني المستمر للمعلمين أثناء الخدمة.

3-إعادة هيكلة المهام الرياضية في الكتب المدرسية لتتحول من مسائل مغلقة ذات إجابة محددة إلى مهام مفتوحة تستفز ملكة التبرير والتفسير.

3.5-المقترحات:

1-تنفيذ دراسات لاحقة تقيس أثر ذات الاستراتيجية على مخرجات رياضية أخرى (مثل: الطلاقة الإجرائية، الفهم المفاهيمي، أو التفكير الجانبي).

2-أثر استراتيجية مقترحة في اكساب طلاب المرحلة الاعدادية مهارات الاستلال التكيفي.

References

Hussein, Ali Mahdi. (2022). The Effectiveness of Active Learning Strategies in Developing Mathematical Thinking Skills among Intermediate School Students. Journal of the College of Education – University of Babylon, 14(3), 210–245.

Al-Zahrani, Hind Saeed. (2023). The Effect of a Training Program Based on Problem Solving on Developing Mathematical Reasoning Skills among Intermediate School Mathematics Teachers. Journal of Education and Psychology, 78(2), 45–82.

Al-Obaidi, Mohammed Kazem. (2021). The Level of Mathematical Proficiency among Intermediate School Students in Light of NCTM Standards. Al-Ustadh Journal – University of Baghdad, 60(4), 18–52.

Al-Shammari, H. H. A., & Al-Dalan, B. M. (2025). The effectiveness of teaching mathematics using electronic mind maps in developing adaptive reasoning among third-grade intermediate students. International Journal of Research in Educational Sciences, 8(4), 501–565.

Al-Harbi, F. G. (2021). *A proposed teaching strategy for supporting productive struggle in learning mathematics and its effectiveness in developing mathematical proficiency among second-grade middle school students* [Unpublished doctoral dissertation]. College of Education, Qassim University. Shamaa Educational Database

Boaler, J. (2016). Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching. Jossey-Bass.

Clerc, M. (2006). Particle swarm optimization. ISTE.

Clerc, M., & Kennedy, J. (2002). The particle swarm: Explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 6(1), 58–73. https://doi.org/10.1109/4235.985692

Cohen, J. (1988). Statistical power analysis for the behavioral sciences (2nd ed.). Lawrence Erlbaum Associates.

Creswell, J. W. (2014). Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches (4th ed.). SAGE Publications.

Dorigo, M., & Stutzle, T. (2004). Ant colony optimization. MIT Press.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. American Psychologist, 34(10), 906–911. https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906

George, D., & Mallery, P. (2003). SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference (4th ed.). Allyn & Bacon.

Holmes, W., Porayska-Pomsta, K., Holstein, K., Sutherland, E., Baker, T., Buckingham Shum, S., ... & Koedinger, K. R. (2022). Ethics of AI in education: Towards a community-wide framework. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 32(2), 504–526.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2009). An educational psychology success story: Social interdependence theory and cooperative learning. Educational Researcher, 38(5), 365–379.

Jonassen, D. H. (1999). Designing constructivist learning environments. In C. Reigeluth (Ed.), Instructional design theories and models (Vol. 2, pp. 215–239). Lawrence Erlbaum Associates.

Kennedy, J., & Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, 4, 1942–1948. https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academy Press.

Li, T., & Li, L. (2023). Design of online education model based on migratory bird algorithm under the concept of sustainable development. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences, 9*.

Mercer, N., & Littleton, K. (2007). Dialogue and the development of children's thinking: A sociocultural approach. Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). Principles to actions: Ensuring mathematical success for all. NCTM.

OECD. (2022). PISA 2022 results: The state of learning and equity in education. OECD Publishing.

Poli, R., Kennedy, J., & Blackwell, T. (2007). Particle swarm optimization: An overview. Swarm Intelligence, 1(1), 33–57. https://doi.org/10.1007/s11721-007-0002-0

Reynolds, C. W. (1987). Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model. ACM SIGGRAPH Computer Graphics, 21(4), 25–34.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. American Psychologist, 55(1), 68–78.

Schoenfeld, A. H. (2014). Mathematical problem solving. Academic Press.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge University Press.

Stylianides, G. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging

students in the activity of proving. Journal of Mathematics Teacher Education, 11(4), 307–332.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2021). Developing adaptive reasoning in mathematics: A framework and empirical investigation. Mathematical Thinking and Learning, 23(2), 89–127. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1737003

TIMSS. (2023). TIMSS 2023 international results in mathematics and science. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Harvard University Press.

Yang, X. S. (2010). Nature-inspired metaheuristic algorithms (2nd ed.). Luniver Press.